

Chapitre 2 | Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

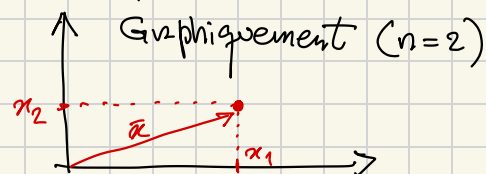
(17.09)

Dans cette séance on va apprendre:

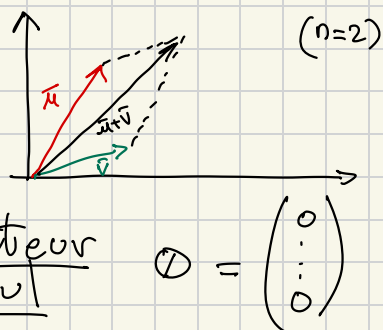
- (i) à exprimer un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs;
- (ii) la notion de famille libre et liée;
- (iii) la notion de partie engendrée par une famille de vecteurs;
- (iv) la notion de produit entre une matrice $n \times n$ et un vecteur de $\mathbb{R}^n$;
- (v) la forme vectorielle d'un SFL.

§ 2.1. [Déf (p.19)] Vecteur = vecteur colonne est un uplet $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que l'on va écrire

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$



Somme: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$



Vecteur nul $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

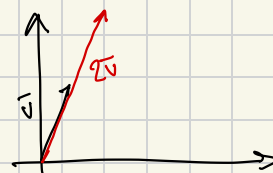
Égalité:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ssi } x_i = y_i \forall i \in [1, n]$$

$[a, b] = \{n \in \mathbb{Z} : a \leq n \leq b\}$

Multiplication par scalaire

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$



Vecteur opposé

$$-\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Prop. 2.1 $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ on a}$

- $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$
- $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$
- $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$
- $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$
- $(\lambda\mu)\bar{x} = \lambda(\mu\bar{x})$

Preuve Exercice

Déf 2.4 On dit que $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} = \lambda\bar{y}$ ou $\bar{y} = \lambda\bar{x}$.

Question $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires? Réponse: Oui! $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

§ 2.3. Combinaison linéaire et partie engendrée

Déf 2.7 I.d. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, une combinaison linéaire (CL) des éléments de $\mathcal{F}$ est $\bar{v} = \lambda_1\bar{v}_1 + \dots + \lambda_n\bar{v}_n$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ coefficients de la C.L.

Exemple 2.9 $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\bar{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Question: $\bar{w}$ est-il une C.L. de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$?

Si oui, il doit exister $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 3 \end{cases}$$

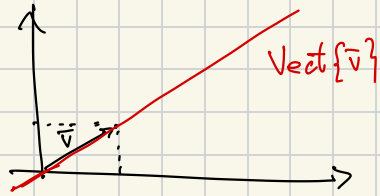
Alors $\alpha_2 = -3$ (L₃)
 $\Rightarrow \alpha_1 = 3/2$ (L₂) mais $(-3) \cdot \frac{3}{2} + (-3) \neq 4 \nabla \leadsto$ ce S.E.L incompatible $\Rightarrow \bar{w}$ n'est pas une CL de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$.

Déf 2.11 É.d. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, la partie de $\mathbb{R}^n$ engendrée par $\mathcal{F}$ est
 (sous-espace vectoriel engendré)

$$\text{Vect } \mathcal{F} = \text{Vect} \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = \{ \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \} \quad (\leftarrow \text{span } \mathcal{F})$$

Exemple 1 $\bar{v} \neq 0$ (dans $\mathbb{R}^2$)

$$\text{Vect} \{ \bar{v} \} = \text{droite engendrée par } \bar{v} = \{ \lambda \bar{v} : \lambda \in \mathbb{R} \}$$



§ 2.4. Famille libre et liée

Déf 2.16 Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée (ou linéairement dépendante) s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = 0 \quad \text{et il existe au moins un } \lambda_i \neq 0.$$

Une famille est libre (ou linéairement indépendante) si elle n'est pas liée.

Questions De quelle façon équivalente on peut dire que $\mathcal{F}$ est libre:

(i) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = 0$ ✗

(ii) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = 0$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ ✓

(iii) $0 \bar{v}_1 + \dots + 0 \bar{v}_k = 0$ ✗ (iv) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul, alors $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k \neq 0$ ✓

Question $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre? $\leftarrow$ Non! $0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\neq 0}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nabla$

Exemple 2.18 $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \longrightarrow$ libre?

(I) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathcal{F} \text{ libre} \iff$ la seule possibilité est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$(*) \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 0 \\ 0 & -2 & 2 & : & 0 \\ 2 & 1 & 1 & : & 0 \\ -3 & 5 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -5 & : & 0 \\ 0 & 5 & 9 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -4 & : & 0 \\ 0 & 0 & 14 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 14 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*)' \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 14L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

Δ lors $\mathcal{F}$ est libre. $\square$

Thm 2.20 Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée ss'il existe $i \in [1, k]$ t.q.

$\bar{v}_i$ est C.L. des vecteurs $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_k$.

$\Leftarrow$ Exo.

(Preuve) $\Rightarrow$ Si $\mathcal{F}$ liée, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ avec au moins un non nul (i.e. $\exists i \in [1, k]$ t.q. $\lambda_i \neq 0$)

t.q. $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \vec{0}$

$$= (\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \bar{v}_{i-1}) + \lambda_i \bar{v}_i + (\lambda_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \lambda_k \bar{v}_k) \implies \bar{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \bar{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \bar{v}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \bar{v}_k \quad \checkmark \quad \square$$

Chapitre 3 Formes vectorielles des SIL

§ 3.1 + 3.2 Généralités

Déf 3.1 Si $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$, on notera $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$.

Pour $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on définit $A \cdot \bar{x} := x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Lemme 3.2 Pour une matrice A de taille $m \times n$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$A \cdot (\bar{x} + \lambda \bar{y}) = A \bar{x} + \lambda A \bar{y}.$$

(Preuve) $A(\bar{x} + \lambda \bar{y}) = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} = (x_1 + \lambda y_1) \bar{a}_1 + \dots + (x_n + \lambda y_n) \bar{a}_n = (x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n) + \lambda (y_1 \bar{a}_1 + \dots + y_n \bar{a}_n) = A \bar{x} + \lambda A \bar{y}.$

Point clé

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{def } uv} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

← forme vectorielle du SIL (*)